IDENTIFIKASI POLA SIMETRI MENGGUNAKAN TEORI GRUP

Fransiskus Fran*, Eka Wulan Ramadhani, dan Helmi

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tanjungpura
Pontianak, Kalimantan Barat, 78124

*) *e-mail: frandly88@gmail.com*

ABSTRAK

Pola-pola desain yang memuat motif berulang secara sistematik dapat dikaitkan dengan konsep geometri dan grup simetri. Terdapat empat isometri dari suatu bidang yaitu translasi, rotasi, refleksi dan *glide* refleksi sebagai penentu kesimetrian yang dimiliki masing-masig pola. Pola-pola simetris akan termasuk dalam salah satu dari 7 grup *frieze* untuk pola-pola dimensi-1 atau salah satu dari 17 grup *wallpaper* untuk pola-pola dimensi-2. Lebih lanjut, dilakukan identifikasi pola-pola kultural (dekorasi seni) yang ada di Rumah Radank (Rumah Adat Dayak) sebagai salah satu cara untuk memahami matematika melalui budaya.

Kata kunci: grup simetri, pola kultural, Rumah Radank

PENDAHULUAN

Bagian penting dalam mempelajari matematika adalah proses untuk memperoleh hasil penemuan. Salah satunya adalah dengan melihat contoh, mencari pola dari contoh, kemudian menemukan alasan dibalik pola untuk mengembangkan konsep matematika.

Secara tidak sadar dalam kehidupan sehari-hari dan dimana saja dapat dijumpai contoh dan pola-pola yang terkait konsep geometri dan grup simetri. Salah satunya adalah pola-pola desain yang memuat motif berulang secara sistematik. Pola-pola tersebut dapat diperoleh dengan mengamati pola-pola di alam, seni, arsitektur dan lainnya. Pola-pola berulang yang dijumpai mengindikasikan adanya kesimetrian (pola simetri).

Para matematikawan telah berhasil mengklasifikasikan pola-pola simetri berdasarkan kesimetriannya. Terdapat empat *rigid motions* (transformasi yang mengawatkan jarak, disebut juga isometri) dari suatu bidang yaitu translasi, rotasi, refleksi dan glide-refleksi (refleksi pada suatu garis yang dilanjutkan dengan translasi secara paralel terhadap garis tersebut) sebagai penentu kesimetrian yang dimiliki masing-masing pola. Pola-pola simetris akan termasuk dalam salah satu dari 7 *frieze* grup untuk pola-pola dimensi-1 atau salah satu dari 17 *wallpaper* grup (juga dikenal sebagai *plane crystallographic groups*) untuk pola-pola dimensi-2.

METODE PENELITIAN

Konsep *frieze* grupdan *wallpaper* grup terkait dengan grup isometri dengan operasi komposisi dari transformasi. Pada artikel ini secara khusus akan dibahas tentang *frieze* grup yang selanjutnya akan digunakan untuk mengidentifikasi pola-pola kultural (dekorasi seni) yang ada di Rumah Radakng (Rumah Adat Dayak) sebagai salah satu cara untuk memahami matematika melalui budaya.

Adanya artikel ini diharapkan dapat memperluas dan memperdalam wawasan mengenai teori geometri-aljabar dan aplikasinya. Teori geometri-aljabar dalam dalam artikel ini terkait grup simetri pada suatu bidang yang melibatkan konsep jarak (metrik) dan transformasi geometri (translasi, rotasi dan refleksi). Lebih lanjut, hal tersebut dapat menjadi ide dasar untuk mengembangkan konsep matematika berdasarkan pola-pola desain yang sering dijumpai, sehingga dapat mendukung aplikasi matematika tidak hanya di bidang geometri-aljabar tetapi juga di bidang-bidang lain.

HASIL DAN PEMBAHASAN

FRIEZE GRUP

Definisi 1 *Suatu metrik pada himpunan* X *merupakan pemetaan* $d: X \times X \to \mathbb{R}$ *sedemikian sehingga:*

D1. $d(x,y) \geq 0$ *untuk setiap* $x, y \in X$ *dan* $d(x,y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$

D2. $d(x,y) = d(y,x)$ *untuk setiap* $x, y \in X$

D3. $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ *untuk setiap* $x, y, z \in X$

Suatu himpunan X *dengan metrik* d *disebut* ***ruang metrik***, *dinotasikan* (X, d).

Definisi 2 *Suatu isometri dari suatu ruang metrik* (X, d) *adalah suatu pemetaan bijektif* $u: X \to X$ *sedemikian sehingga, untuk setiap* $x, y \in X$, $d(x,y) = d(u(x), u(y))$.

Definisi 3 *Suatu grup merupakan himpunan tidak kosong dan dilengkapi suatu operasi biner yang asosiatif dan memuat suatu identitas dan setiap unsurnya memiliki invers.*

Teorema 4 *Suatu himpunan* $Isom\,(X)$ *dari isometri dari suatu ruang metrik* X *membentuk suatu grup atas pemetaan komposisi.*

Selanjutnya lebih khusus akan dibahas himpunan isometri dari ruang Euclid terhadap metrik Pythagoras. Isometri yang paling umum diketahui pada bidang Euclid antara lain translasi, rotasi dan refleksi. Suatu isometri di $\mathbb{R}^2$ merupakan suatu bijeksi dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}^2$ yang mengawetkan jarak.

 ISBN: 978-602-61545-0-7

Definisi 5 *Suatu translasi t merupakan suatu pemetaan yang memindahkan setiap titik dengan suatu jarak tertentu dalam arah tetap. Jika dituliskan dalam simbol*

$$t: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

dengan $t(x_1, x_2) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2)$ untuk setiap $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ dan $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ merupakan vektor yang konstan. Selanjutnya, t dapat dituliskan sebagai $t_{\boldsymbol{a}}$ yaitu perpindahan arah oleh $\boldsymbol{a}$ terhadap t.

Definisi 6 *Suatu rotasi s adalah suatu pemetaan yang memindahkan setiap titik dari suatu bidang dengan sudut tertentu terhadap suatu titik yang disebut **center** atau dapat dinyatakan sebagai berikut.*

$$s: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

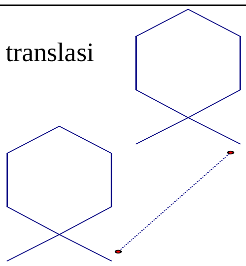
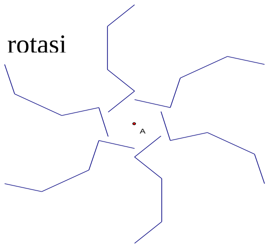
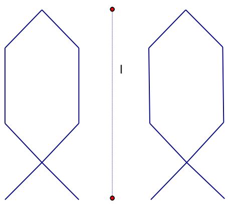
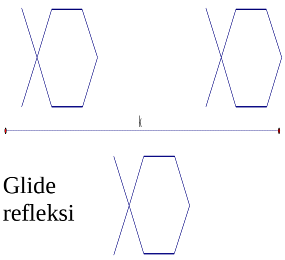
$$s: (\rho, \theta) \mapsto (\rho, \theta + \alpha)$$

dengan $\alpha \in \mathbb{R}$ mod 2π..

Definisi 7 *Refleksi r merupakan suatu pemetaan yang memindahkan setiap titik dari bidang ke bayangan cermin dalam suatu garis l yang fix. Garis l ini disebut axis dari r dan ditulis $r = r(l)$. Selanjutnya, misalkan $P \in \mathbb{R}^2$, jika $P \in l$ maka $r(P) = P$, dan jika $P \notin l$ maka $r(P)$merupakan titik unik di $\mathbb{R}^2$ sedemikian sehingga l tegak lurus dengan garis yang dibentuk oleh P dan $r(P)$.*

Definisi 8 *Suatu glide refleksi adalah sauatu refleksi pada suatu axis yang diikuti oleh translasi yang sejajar dengan axisnya.*

Tabel 1. Contoh Isometri

translasi 	rotasi 
 refleksi	 Glide refleksi

Definisi 9 *Misalkan X suatu ruang metrik dan $F \subset X$. Didefinisikan*

$$Sym(F) = \{u \in Isom(X) | u(F) = F\}$$

dengan $u(F) = \{u(x) | x \in F\}$.

Teorema 10 *Misalkan X suatu ruang metrik dan $F \subset X$. Maka $Sym(F)$ merupakan subgrup dari $Isom(X)$.*

Berdasarkan definisi, suatu isometri disebut simetri ketika suatu isometri memetakan pola pada suatu bidang kembali ke dirinya sendiri. Lebih lanjut, berdasarkan teorema sebarang subgrup dari suatu grup isometri yang memuat simetri dari suatu bidang disebut grup simetri. Salah satu tipe dari grup simetri adalah *frieze* grup.

Definisi 11: *Suatu frieze grup adalah suatu grup simetri yang dibangun oleh satu translasi (grup siklik takhingga).*

Misal diberikan sebarang pola frieze pada bidang berdimensi 2. Misalkan τ menyatakan suatu translasi dan diberikan empat simetri (isometri) yaitu gilde refleksi (γ), refleksi horizontal (β), refleksi vertikal (ρ) dan rotasi $180^\circ(\alpha)$.

Teorema 12: *Jika F adalah grup frieze maka F adalah salah satu dari tujuh grup yang mungkin berikut:*

a. $F_1 = \{\tau^k : k \in \mathbb{Z}\}$.

b. $F_2 = \{\gamma^k : k \in \mathbb{Z}\}$.

c. $F_3 = \{\tau^k \rho^m : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_2\}$.

d. $F_4 = \{\tau^k \alpha^m : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_2\}$.

e. $F_5 = \{\gamma^k \alpha^m : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_2\}$.

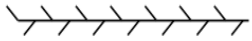
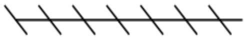
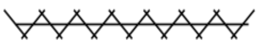
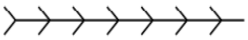
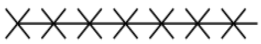
f. $F_6 = \{\tau^k \beta^m : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_2\}$

g. $F_7 = \{\tau^k \beta^m \rho^n : k \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{Z}_2\}$

Tabel 2. Deskripsi *Frieze* grup

Tipe Grup	Translasi	Rotasi 180°	Refleksi Horizontal	RefleksiVertikal	*Glide* Refleksi
F_1	Ya	Tidak	Tidak	Tidak	Tidak
F_2	Ya	Tidak	Tidak	Tidak	Ya
F_3	Ya	Tidak	Tidak	Ya	Tidak
F_4	Ya	Ya	Tidak	Tidak	Tidak
F_5	Ya	Ya	Tidak	Ya	Ya
F_6	Ya	Tidak	Ya	Tidak	Tidak
F_7	Ya	Ya	Ya	Ya	Tidak

Tabel 3. Contoh *Frieze* grup

Grup *frieze*	Contoh garis	Contoh kaki
F_1		
F_2		
F_3		
F_4		
F_5		
F_6		
F_7		

IDENTIFIKASI POLA KULTURAL YANG ADA DI RUMAH RADAKNG

Rumah Radakng merupakan rumah adat Suku Dayak yang dibangun untuk dijadikan *landmark* baru di kota Pontianak setelah Tugu Katulistiwa. Rumah Radakng atau biasa disebut dengan *longhouse* merupakan satu diantara ciri khas Provinsi Kalimantan Barat.

Rumah Radakng adalah sebutan untuk rumah panjang suku Dayak Kanayatn di Provinsi Kalimantan Barat. Ciri khas kearifan lokal tersebut bisa kita lihat dari ukiran-ukiran motif dengan relief yang beraneka ragam. Motif-motif tersebut terdapat pada pintu-pintu di Rumah Radakng, lalu pada tiang penyangga, dan di dekat atap bagian atas. Motif tersebut dominan berwarna merah yang merupakan warna khas Suku Dayak yang melambangkan keberanian. (Sumber:http//infopromodiskon.com/tempatwisata/profile/rumah-radakng-pontianaksertakeagungannya/)

Gambar 1 Beberapa pola kultural yang ada di rumah Radakng:

Gambar 2 Pintu yang ada di Rumah Radakng,

berdasarkan Gambar 1 dapat dilihat bahwa pola kultural yang terdapat pada pintu tersebut memiliki refleksi vertikal (sumbu -y) dan translasi ke pintu selanjutnya Oleh karena itu Gambar 1 menunjukkan pola berbentuk:

... bd bd bd...

Dengan demikian berdasarkan pengkalsifikasian *frieze* grup maka Gambar 2 termasuk dalam *frieze* grup F_3.

Gambar 3. Tiang yang ada di Rumah Radakng dengan tinggi sekitar 7 meter.

Dekorasi seni yang ada pada tiang sesuai Gambar 2 menunjukkan adanya refleksi vertikal dan horizontal yang dilanjutkan dengan suatu translasi. Berdasarkan pola simetrinya, Gambar 3 mengikuti pola:

$$\cdots \mathbf{pq\ pq\ pq} \cdots$$
$$\cdots \mathbf{bd\ bd\ bd} \cdots$$

Dengan demikian, Gambar 3 merupakan contoh dari *frieze* grup F_7.

Gambar 4. Salah satu bagian dari Rumah Radakng.

Gambar dengan dekorasi seni yang menunjukkan adanya refleksi vertikal dan translasi satu arah seperti pada Gambar 2. Oleh karena itu, berdasarkan klasifikasi *frieze* grup, pola pada gambar Gambar 4 termasuk dalam F_3.

Gambar 5. Potongan bagian dari salah satu tiang (terdapat 6 tiang besar) yang di atasnya terdapat Burung Enggang.

Pada Gambar 5, dekorasi seni yang terdeteksi memiliki refleksi horizontal (sumbu-x) dan dilanjutkan dengan translasi satu arah. Oleh karena itu pola simetrinya mengikuti:

$$\cdots \mathbf{p\ p\ p} \cdots$$
$$\cdots \mathbf{b\ b\ b} \cdots$$

Dengan demikian berdasarkan pengklasifikasian *frieze* grup maka Gambar 5 dapat diidentifikasi sebagai grup F_6.

Gambar 6. Potongan tiang dari Gambar 4.

Pola dari dekorasi seni yang ada pada Gambar 6 mengindikasikan adanya refleksi vertikal dan horizontal dengan suatu translasi. Dengan demikian pola simetri pada Gambar 6 dapat diklasifikasikan kedalam *frieze* grup yang sama seperti pada Gambar 3 yaitu F_7.

Gambar 7 Potongan tiang seperti Gambar 4 dan 5.

Berdasarkan pola dekorasi seninya maka dilihat bahwa Gambar 7 memuat simetri yang berupa refleksi vertikal dan horizontal tetapi tidak memuat translasi. Berdasarkan fakta tersebut, maka pola simetri pada Gambar 7 tidak dapat dikelompokkan dalam salah satu dari 7 *frieze* grup.

Gambar 8 Salah satu bagian atas dekat atap dari Rumah Radakng.

Pola dekorasi pada Gambar 8 memuat simetri yang berupa refleksi vertikal dan tidak memuat translasi. Berdasarkan fakta tersebut, maka pola simetri pada Gambar 8 tidak dapat dikelompokkan dalam salah satu dari 7 *frieze* grup.

KESIMPULAN

Hasil identifikasi pola simetri dari dekorasi seni yang ada di Rumah Radakng berdasarkan konsep *frieze* grup diperoleh bahwa tidak semua pola simetri yang ada dapat diklasifikasikan ke dalam salah satu dari 7 *frieze* grup karena terdapat pola simetri yang tidak memuat translasi. Lebih lanjut diperoleh juga bahwa terdapat 3 pola *frieze* yang dapat ditemukan yaitu F_3, F_6 dan F_7.

REFERENSI

Armstrong, M. A., 1988. *Groups and Symmetry*. London: Spinger.

Bodner,B Lynn.,2013. The Planar Crystallographic Groups Represented at the Alhambra. Bridges: Mathematical Connections in Art, Music, and Science Conference Proceedings, pp. 225-232.

Bodner,B Lynn.,2013. Frieze Pattern of the Alhambra. Bridges: Mathematical Connections in Art, Music, and Science Conference Proceedings, pp. 203-209.

Crowe, Donald W.,2001. Symmetries of Culture. Bridges: Mathematical Connections in Art, Music, and Science Conference Proceedings, pp.1-20.

Farmer, David W., 1996. *Groups and Symmetry: A Guide to Discovering Mathematics.* USA: . American Mathematica Society.

Johnson, D. L., 2001. Symmetries. London: Spinger.

Martin,George E,1982. *Transformation Geometry*.New York: Spinger-Verlag.

Schattschneider,Doris.,1978. The Plane Symmetry Groups: Their Recognition, American Mathematical Monthly, Vol 85, Issue 6, pp.439-450.